Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Stetigkeit** mit Lösungen
DR. ANTON MALEVICH, LEONARD BECHTEL, JULIAN MAAS

Aufgabe 1 (2) *Stetigkeit nachweisen mit ε-δ-Kriterium*
Zeigen Sie mithilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen stetig in den angegebenen Definitionsbereichen sind.

a) $f_1(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $f_2(x) = 2x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $f_3(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $f_4(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$

Lösung.
Nach dem ε-δ-Kriterium ist eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0).$$

Schreiben wir diese Aussage so um, dass die Quantoren vorne stehen, so lautet sie

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ \forall x \in D : \qquad |x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dabei sagt das "(ε, x_0)" hinter dem δ aus, dass die Wahl des δ abhängig von ε und von x_0 sein darf (vgl. $N(\varepsilon)$ bei Folgen).

a) $f_1(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.
Beweis:
Oben haben wir die Stetigkeit in einem Punkt, aber da wir nun die Stetigkeit der Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ also für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ zeigen wollen, müssen wir zeigen:
$\forall x_0 \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ \forall x \in D :$

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0) \quad \Rightarrow \quad |f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon.$$

Seien also $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.
Dann gilt für $0 < \delta = \varepsilon$, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - x_0| < \delta \tag{1}$$

gilt:

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0| \overset{(2)}{<} \delta = \varepsilon.$$

Das δ bestimmen wir dabei normalerweise, indem wir erst den Betrag $|f(x) - f(x_0)|$ so lange versuchen nach oben abzuschätzen, bis der Ausdruck rechts nurnoch von $|x - x_0|$ (da wir diesen Ausdruck mit δ abschätzen können) oder von x_0 abhängt (da δ von x_0 abhängen darf). In diesem Fall waren wir direkt fertig und können δ sogar unabhängig[1] von x_0 wählen, das ist allgemein nicht so, wie wir gleich sehen werden.

b) $f_2(x) = 2x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$ ist auch stetig auf ganz $\mathbb{R}$.
Beweis:
Sei wieder $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt für $0 < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - x_0| < \delta$$

gilt:

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| = |2x + 5 - (2x_0 + 5)| = 2\,|x - x_0| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

[1] Falls wir das schaffen, zeigen wir damit sogar, dass die Funktion *gleichmäßig* stetig ist. Dazu später mehr.

c) $f_3(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ ist auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
Beweis:
Sei wieder $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.
Da die Überlegung hier ein bisschen komplizierter ist, geben wir δ mal nicht vor, sondern zeigen, wie man es finden kann. Wir fangen wieder mit der Voraussetzung

$$|x - x_0| < \delta$$

an und schätzen dann ab:

$$|f_3(x) - f_3(x_0)| = \left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0|\,|x + x_0|$$

$$= |x - x_0|\,|x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0|\,(|x - x_0| + 2\,|x_0|)$$
$$< \delta(\delta + 2\,|x_0|)$$

Jetzt sind wir an einem Term angelangt, der nur noch von δ und x_0 abhängt. Jetzt könnten wir überlegen, wie man δ wählen muss, damit dieser Term gleich ε ist (da dann die gewünschte Ungleichung gilt). Mit quadratischer Ergänzung würden wir z.B. $\delta = \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - |x_0|$ erhalten.
Da wir aber δ im Prinzip frei wählen können, bietet es sich hier an, $\delta \leq 1$ zu fordern, da dann

$$\delta(\delta + 2\,|x_0|) \leq \delta(1 + 2\,|x_0|)$$

gilt und wir mit dieser Zusatzbedingung im Kopf auch $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\}$ wählen können. Beide Wege führen zum Ziel.
Sei nämlich $\delta = \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - |x_0|$ und $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - x_0| < \delta$$

so gilt

$$|f_3(x) - f_3(x_0)| < \delta(\delta + 2\,|x_0|) = (\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - |x_0|)(\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - |x_0| + 2\,|x_0|)$$

$$= (\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - |x_0|)(\sqrt{\varepsilon + x_0^2} + |x_0|) = \varepsilon + x_0^2 - x_0^2 = \varepsilon.$$

Falls aber $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - x_0| < \delta$$

so gilt auch

$$|f_3(x) - f_3(x_0)| < \delta(\delta + 2\,|x_0|) \overset{\delta\leq 1}{\leq} \delta(1 + 2\,|x_0|) \overset{\delta \leq \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}}{\leq} \frac{\varepsilon}{1 + 2\,|x_0|}(1 + 2\,|x_0|) = \varepsilon.$$

d) $f_4(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$ ist auf seinem gesamten Definitionsbereich $[0, \infty)$ stetig.
Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in [0, \infty)$ beliebig.
Wir bestimmen wieder unser δ durch Abschätzen

$$|f_4(x) - f_4(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left|(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right|$$

$$= \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| < \frac{\delta_1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{\delta_1}{\sqrt{x_0}}$$

damit hätten wir für alle $x_0 \in (0, \infty)$ unser $\delta_1 = \varepsilon \cdot \sqrt{x_0}$ gefunden.
Für $x_0 = 0$ finden wir außerdem mit der Bedingung $|x - 0| < \delta_2$

$$|f_4(x) - f_4(x_0)| = |f_4(x) - f_4(0)| = \sqrt{x} = \sqrt{|x - 0|} < \sqrt{\delta_2}$$

auch $\delta_2 = \varepsilon^2$ und somit für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x_0 \in [0, \infty)$ ein solches δ.

□

Aufgabe 2 (2-3) *Beweis mit ε-δ-Kriterium*
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion die stetig im Punkt $0 \in \mathbb{R}$ ist und $f(0) = 0$. Zusätzlich gelte $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Lösung. Wir wollen zeigen, dass mit obigen Bedingungen f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.
Dabei wissen wir, dass f stetig in 0 ist, also gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ beliebig. Wir wählen $\delta > 0$ wie in (2), sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - x_0| < \delta$$

gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0 + x_0) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \overset{(2)}{<} \varepsilon$$

□

Aufgabe 3 (2) *Stetigkeit stückweise definierter Funktionen*
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{vermöge} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^2 - 2}, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \backslash \{-2, +2\} \\ \alpha, & \text{falls } x = -2 \\ \beta, & \text{falls } x = 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x)$ in $\mathbb{R}$ stetig ist.

Lösung.
Auf den Intervallen $(-\infty, -2), (-2, 2)$ und $(2, \infty)$ entspricht $f(x)$ der Funktion

$$\frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^2 - 2} = \frac{(x^2 - 2)^2}{x^2 - 2} = x^2 - 2$$

und ist dort damit als Differenz stetiger Funktionen stetig.
In den Punkten -2 und 2 müssen links- und rechtsseitiger Grenzwert von $f(x)$ übereinstimmen, wodurch sich für $\alpha = 2$ und $\beta = 2$ ergeben. □

Aufgabe 4 (2-3) *Dirichletsche Sprungfunktion*
Eine bezueglich ihrer Stetigkeit besonders interessante Funktion ist die sogenannte Dirichlet-Sprungfunktion:

$$f_d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{vermöge} \quad f_d(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

i) Beweisen Sie, dass die Dirichlet-Sprungfunktion in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Sei nun $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$|f(x)| \leq |x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Beweisen Sie, dass $f(x)$ in $x_0 = 0$ stetig ist.

iii) Untersuchen Sie nun die der folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$\tilde{f}_d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{vermöge} \quad \tilde{f}_d(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Lösung.

i) Ein Beweis der Unstetigkeit von f_d über Epsilon-Delta-Kriterium ist möglich, aber umständlich. Stattdessen zeigen wir, dass f_d auf $\mathbb{R}$ nicht folgenstetig und damit auch nicht stetig ist. Dabei betrachten wir zwei Fälle:
Fall 1: $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
Da sich die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen definieren lassen muss es insbesondere eine Folge

$$\{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \subseteq \mathbb{Q}$$

rationaler Zahlen geben, die gegen x_0 konvergiert. Für diese gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Damit ist f_d auf $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nicht stetig.
Fall 2: $x_0 \in \mathbb{Q}$
Da $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt[2], muss es eine Folge

$$\{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

irrationaler Zahlen geben, die gegen x_0 konvergiert. Aber auch hier gilt wieder

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 1 = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Damit ist f_d auch auf $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{R}$ und schließlich auf ganz $\mathbb{R}$ nicht stetig.

ii) Zunächst bemerken wir, dass aus der Voraussetzung mit

$$|f(0)| \leq |0| = 0$$

folgt, dass $f(0) = 0$ ist. Weiterhin zeigen wir mit Epsilon-Delta-Kriterium: Für $\varepsilon > 0$ beliebig gilt für $\delta = \varepsilon$ folgende Abschätzung

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| \overset{Vor.}{=} |x| = |x - 0| < \delta = \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|(|\, x - x_0) < \delta$.

iii) Mit ii) folgt, dass $\tilde{f}_d$ stetig in 0 ist, und auf ähnlichem Wege wie in i), dass die Funktion *nur* in 0 stetig ist.

[2] Zum Beweis dieser Aussage reicht es zu zeigen, dass $\left\{r \cdot \sqrt{2} \mid r \in \mathbb{Q}\right\} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, da die Übermenge dann insbesondere dicht in $\mathbb{R}$ liegen muss.

□

Aufgabe 5 (3) *Fixpunkte von Iterationsfolgen*
Sei die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig.
Zeigen Sie, dass dann für beliebiges $x_0 \in [a, b]$ die Iterationsfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
mit $x_{n+1} := f(x_n)$:

i) monoton ist (Fallunterscheidung!).

ii) gegen einen Grenzwert ξ konvergiert.

iii) $f(\xi) = \xi$ gilt.

Lösung.

i) Man kann einfach per Induktion beweisen: Falls $x_0 < x_1$, dann ist die Folge monoton steigend, andernfalls ist sie monoton fallend.

ii) Da $x_n \in [a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (wieder mit Induktion) ist die Folge beschränkt und damit wegen i) auch konvergent.

iii) Da f stetig ist gilt

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(\xi)$$

□

Aufgabe 6 (3) *Zusammenhang gleichmäßige und punktweise Stetigkeit*
Beweisen Sie:
Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die gleichmäßig stetig (auf D) ist, ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Lösung.
Hierbei muss man sich einfach noch einmal die Definitionen beider Begriffe in Erinnerung rufen. Eine Funktion wie oben heißt gleichmäßig stetig auf D, falls gilt
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0, x \in D :$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Sie heißt hingegen (nur) stetig auf D, falls gilt
$\forall \varepsilon > 0 \forall x_0 \in D \exists \delta > 0 \forall x \in D :$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Man beachte, dass der einzige Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Stetigkeit die Reihung der Quantoren ist. Wenn eine Funktion nun gleichmäßig stetig ist, so existiert *ein* Delta, sodass die folgende Aussage für alle x und x_0 gilt. Bei punktweiser Stetigkeit muss es dagegen nur für jedes x_0 ein solches Delta geben, es muss aber nicht für jedes x_0 dasselbe sein. Ein formeller Beweis wäre damit:
Sei f wie oben gleichmäßig stetig auf D, sowie $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in D$ beliebig.
Dann existiert nach Voraussetzung ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in D$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

□

Aufgabe 7 (2) *Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit*
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit in den angegebenen Definitionsbereichen:

i) $f_1(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$

ii) $f_2(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1]$

iii) $f_3(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

iv) $f_4(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1]$

v) $f_5(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

vi) $f_6(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$

vii) $f_7(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$

Lösung.

i) $f_1(x)$ ist zunächst stetig in seinem Definitionsbereich (vgl. Aufgabe 1). Mit der Ungleichung (Beweis!)

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$$

für alle $x, y \in [0, \infty)$ folgt sogar die gleichmäßige Stetigkeit über $\delta = \varepsilon^2$.

ii) $f_2(x)$ ist gleichmäßig stetig auf $[-1, 1]$, da wir mit $|x + x_0| \leq 2$ für $x, x_0 \in [-1, 1]$ durch Setzung von $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ abschätzen können

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| = \left|x^2 - x_0^2\right| = |x + x_0| \cdot |x - x_0| \overset{s.o.}{\leq} 2\,|x - x_0| < 2\delta = \epsilon$$

Allgemein sind nach dem Satz von Heine-Cantor alle stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig. Nach Aufgabe 6 ist f_2 damit auch stetig auf [-1, 1].

iii) $f_3(x)$ ist nicht gleichmäßig stetig in $\mathbb{R}$.
Angenommen, es wäre doch so, dann müsste zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ existieren, sodass für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$\left|x^2 - x_0^2\right| < \varepsilon.$$

Betrachten wir aber $x = \frac{1}{\delta}$ und $x_0 = x + \frac{\delta}{2}$, so gilt zwar $|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$, aber

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |x + x_0|\,|x - x_0| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$

Ein Widerspruch.
f_3 ist allerdings stetig auf $\mathbb{R}$ (siehe Aufgabe 1).

iv) $f_4(x)$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0, 1]$. Als Gegenbeispiel wähle wie zuvor $\varepsilon = 1$ und falls $\delta \geq 1$ die Werte $x = 1$ und $x_0 = \frac{1}{4}$, bzw. falls $0 < \delta < 1$ die Werte $x = \delta$ und $x_0 = \frac{\delta}{2}$.
Die Funktion ist aber stetig auf (0,1] (siehe Aufgabe 1).

v) $f_5(x)$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. Für den Nachweis, beweise und verwende, dass für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{|x + x_0|}{(1+x^2)(1+x_0^2)} \leq 1$$

vi) $f_6(x)$ ist gleichmäßig stetig auf ihrem Definitionsbereich. Zum Beweis betrachte die inverse Dreiecksungleichung für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|.$$

vii) $f_7(x)$ ist nicht stetig auf $\mathbb{R}$ und damit auch nicht gleichmäßig stetig. Zum Nachweis betrachte die durch $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge, welche die Folgenstetigkeit verletzt.

$\square$

Aufgabe 8 (3) *Lipschitzstetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit*
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig, d.h. es existiert eine Zahl $L \in [0, \infty)$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie, dass $f(x)$ dann auch in $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 9 (3) *Vererbung der Stetigkeit*
Es seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Beweisen Sie, dass dann folgende Funktionen ebenfalls stetig in $x_0 \in D$ sind:

i) $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$

ii) $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

iii) $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$

iv) $(|f|)(x) := |f(x)|$

v) $(fg)(x) := f(x)g(x)$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$, $g \neq 0$ für alle $x \in D$

vii) $\max\{f, g\} := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{sonst} \end{cases}$

viii) $\min\{f, g\} := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \leq g(x) \\ g(x), & \text{sonst} \end{cases}$

ix) $g \circ f(x) = g(f(x))$

Wobei für die letzte Teilaufgabe ix) gelte $f : D \longrightarrow E$ ist stetig in $x_0 \in D$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $y_0 := f(x_0)$.

Aufgabe 10 (2) *Fundamentalsatz von Weierstraß*
Laut dem Fundamentalsatz von Weierstraß ist eine auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$ definierte, stetige Funktion $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und besitzt sowohl ein Minimum als auch ein Maximum.
Finden Sie jeweils ein Beispiel für ein offenes, ein halboffenes und unbeschränktes Gebiet, sowie zugehörige Funktionen, die unbeschränkt sind (bzw. ihre Extremwerte nicht annehmen).

Aufgabe 11 (3) *Gleichheit stetiger Funktionen*
Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft:

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}.$$

Beweisen Sie, dass dann gilt

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 12 (3) *Fixpunkte stetiger Funktionen*
Es seien $a < b$ reelle Zahlen.
Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, einen *Fixpunkt* besitzt, d.h. es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit der Eigenschaft

$$f(\xi) = \xi.$$

Aufgabe 13 (3) *Lösbarkeit nicht-trivialer Funktionalgleichungen*
Untersuchen Sie, ob es für die folgenden Gleichungen jeweils eine reelle Zahl $x > 0$ gibt, die die folgende Gleichung erfüllt:

i) $e^{\sqrt{x}} = \sin(x) + 2$ ii) $e^x = x + 1$

Aufgabe 14 (3) *Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen*
Untersuchen Sie die Funktionenfolge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ der stetigen Funktionen

$$f_k(x) := x^k \quad x \in [0, 1]$$

auf Konvergenz. Existiert eine Grenzfunktion? Falls ja, liegt nur punktweise oder sogar gleichmäßige Konvergenz vor?

Lösung.
Die obige Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Denn falls $x \in [0, 1)$ so gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} x^k = 0$$

und falls $x = 1$ so gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k(1) = \lim_{k\to\infty} 1^k = 1.$$

Da die f_k alle stetig sind, die Grenzfunktion aber nicht stetig ist ergibt sich die Vermutung, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist. Diese bestätigen wir, denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \begin{cases} \left|x^k - 0\right| = x^k, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ |1 - 1| = 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases} = 1$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

und folglich keine gleichmäßige Konvergenz. $\square$